Comportememt asymptotique des suites et des fonctions
Exercices - Corrigé

Exercice 1 (n°15 p 28)

On a pour tout $x > 0$,

$$\frac{100x-2}{x+3} = \frac{100x\left(1-\frac{2}{100x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{100\left(1-\frac{2}{100x}\right)}{1+\frac{3}{x}}.$$

Or $1-\dfrac{2}{100x} \to 1$ et $1+\dfrac{3}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$ donc finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{100x-2}{x+3} = 100.$$

Donc la droite d'équation $y = 100$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Exercice 2 (n°16 p 28)

On a pour tout $x > 0$,

$$x^2 - 100x = x^2\left(1-\frac{100}{x}\right).$$

Or $1-\dfrac{100}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 - 100x = +\infty.$$

Il n'y a pas d'asymptote.

Exercice 3 (n°17 p 28)

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty.$$

Par ailleurs, pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{x^2+3}{x-1} = x+1+\frac{4}{x-1}.$$

Donc la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 4 (n°18 p 28)

On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty.$$

Par ailleurs, pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}.$$

Donc la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 5 (n°23 p 29)

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{5}{x} = 1$ donc la droite $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$. Par ailleurs,

$$0.9 < 1-\frac{5}{x} < 1.1 \Leftrightarrow -.1 < -\frac{5}{x} < 0.1 \Leftrightarrow x > 50.$$

Exercice 6 **(n°24 p 29)**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$ donc la droite $y=0$ est asymptote en $+\infty$. Par ailleurs,

$$-0.1 < \frac{x+1}{x^2} < 0.1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+1}{x^2} < 0.1 \Leftrightarrow 0 < x+1 < 0.1x^2 \Leftrightarrow x > 11.$$

Exercice 7 **(n°25 p 29)**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 1$ donc la droite $y=1$ est asymptote en $+\infty$. Par ailleurs,

$$1-0.1 < 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} < 1+0.1 \Leftrightarrow -0.1 < -\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} < 0.1 \Leftrightarrow x > 20.$$

Exercice 8 **(n°26 p 29)**

La droite $y = x+2$ est asymptote oblique en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2-\dfrac{5}{x} = +\infty$. Par ailleurs,

$$-0.1 < -\frac{5}{x} < 0.1 \Leftrightarrow x > 50.$$

Exercice 9 **(n°27 p 29)**

La droite $y = 2x+3$ est asymptote oblique en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{5}{x}+2x = +\infty$. Par ailleurs,

$$-0.1 < -\frac{5}{x} < 0.1 \Leftrightarrow x > 50.$$

Exercice 10 **(n°28 p 29)**

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x^2-5x+3}{x} = x-5+\frac{3}{x}.$$

Donc la droite $y = x-5$ est asymptote en $+\infty$. En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$. Par ailleurs,

$$-0.1 < \frac{3}{x} < 0.1 \Leftrightarrow x > 30.$$

Exercice 11 (n°29 p 29)

1) On cherche à résoudre l'inéquation $0.9 < f(x) < 1.1$ i.e.

$$-0.1 < -\frac{1}{x+2} < 0.1 \Leftrightarrow x+2 > 10 \Leftrightarrow x > 8.$$

2) De manière analogue, on a

$$0.99 < f(x) < 1.01 \Leftrightarrow -0.01 < -\frac{1}{x+2} < 0.01 \Leftrightarrow x > 98.$$

3) À faire sur une calculatrice.

4) On a

$$1-E < f(x) < 1+E \Leftrightarrow -E < -\frac{1}{x+2} < E \Leftrightarrow x > \frac{1}{E} - 2.$$

5) Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et ainsi la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Exercice 12 (n°32 p 30)

On a $\lim\limits_{x\to-3} 100x-2 = 298$ et $\lim\limits_{x\to-3} x+3 = 0$ donc

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} \frac{100x-2}{x+3} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \frac{100x-2}{x+3} = -\infty.$$

Ainsi la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale.

Exercice 13 (n°33 p 30)

On a $\lim\limits_{x\to0} x^2 - \dfrac{100}{x^2} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

Exercice 14 (n°34 p 30)

On a $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+3}{|x-1|} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$ et $|x-1| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale.

Exercice 15 (n°35 p 30)

On a

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{x^3}{x+1} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{x^3}{x+1} = +\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale.

Exercice 16 (n°40 p 30)

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a

$$x - \frac{1}{x} \leq x + \frac{\sin x}{x} \leq x + \frac{1}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \frac{1}{x} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} x + \frac{\sin x}{x} = +\infty.$$

De même, on déduit de l'encadrement que

$$\lim_{x \to -\infty} x + \frac{\sin x}{x} = -\infty.$$

Par ailleurs, la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = x$. En effet,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Exercice 17 (n°41 p 30)

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, on a

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty.$$

De même, on déduit de l'encadrement que

$$\lim_{x \to -\infty} x + \sin x = -\infty.$$

En revanche cette fois, la courbe de f n'admet pas d'asymptote ; en effet, $\frac{f(x)}{x} \to 1$ quand $x \to \pm\infty$ mais $f(x) - x$ n'a pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exercice 18 (n°42 p 30)

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(1 + \sin x)$. Or la parenthèse n'a pas de limite et change de signe donc f n'a pas de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Exercice 19 (n°43 p 30)

On a $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

car $1 + \frac{\sin x}{x} \geq 0$ pour tout $x \neq 0$. Par ailleurs $\frac{f(x)}{x} = x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$ donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Exercice 20 **(n°44 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Par ailleurs, $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$ donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Exercice 21 **(n°45 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 22 **(n°46 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = 0.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 23 **(n°47 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -5x^2 = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -5x^2 = -\infty.$$

Par ailleurs, $\dfrac{f(x)}{x} \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$, donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Exercice 24 **(n°48 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-2} f(x) \lim_{x\to-2} \frac{-5}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$ mais aussi une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Exercice 25 **(n°49 p 30)**

On a

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

Exercice 26 **(n°50 p 30)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = x - x\sqrt{x} = x\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right).$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Par ailleurs, $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \sqrt{x} \to -\infty$ quand $x \to +\infty$ donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote.

Exercice 27 **(n°51 p 30)**

On a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2}x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{2}x = -\infty.$$
En outre, $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x(x+\sin x)} \to \sqrt{2}$ quand $x \to +\infty$ et $f(x) - \sqrt{2}x = 3 - \frac{1}{x+\sin x} \to 3$ quand $x \to +\infty$. Donc la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = \sqrt{2}x + 3$.

Exercice 28 **(n°53 p 31)**

1) On a $u_0 = 0$, $u_1 = 0.4$, $u_2 = 0.44$, $u_3 = 0.444$ et $u_4 = 0.4444$.
2) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{10^{n+1}} > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
   Par définition, le premier chiffre après la virgule de u_n est 4 donc $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Ainsi (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge. Notons a sa limite. On a par définition $0.4 \leq u_n \leq 0.5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite
$$0.4 \leq a \leq 0.5$$
4) Par construction de la suite, $a = 0.444444\ldots$ donc $10a = 4 + a$ d'où $a = \frac{4}{9}$.

Exercice 29 **(n°57 p 31)**

On peut choisir $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ ou $u_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ ou $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 30 **(n°58 p 31)**

On peut choisir $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ ou $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ou $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 31 **(n°59 p 31)**

On peut choisir $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ou $u_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 32 **(n°60 p 31)**

On peut choisir $u_n = n$ ou $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 33 **(n°61 p 31)**

Une telle situation n'est pas possible.

Exercice 34 **(n°62 p 31)**

On peut choisir $u_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$ ou $u_n = n + \frac{\sin n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 35 (n°80 p 32)

1) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}.$$

Donc on a à résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b-a & = & 3 \\ c-b & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 5 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a

$$f(x)=2x+5+\frac{3}{x-1}.$$

2) Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+5)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x-1}=0$, de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(2x+5)=0$ donc la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y=2x+5$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Par ailleurs, pour tout $x>1$, on a $f(x)-(2x+5)=\frac{3}{x-1}>0$ donc quand $x>1$, la courbe de f est au-dessus de son asymptote et quand $x<1$, on a $f(x)-(2x+5)<0$ donc la courbe de f est en-dessous de son asymptote.

Exercice 36 (n°81 p 32)

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+3x-2}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+(x^2+1)+2x-3}{x^2+1}=x+1+\frac{2x-3}{x^2+1}.$$

2) Donc la courbe de f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y=x+1$. En effet, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x^2+1}=0$.

3) Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)-(x+1)=\frac{2x-3}{x^2+1}$ donc si $x>\frac{3}{2}$, la courbe de f est au-dessus de son asymptote et pour $x<\frac{3}{2}$, la courbe de f est en-dessous de son asymptote.

Exercice 37 (n°103 p 34)

1) Pour tout $x>0$, on a

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+x+1}=x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\frac{f(x)}{x}\to 2$ quand $x\to+\infty$. Par ailleurs,

$$f(x)-2x=-x+\sqrt{x^2+x+1}=\frac{x^2+x+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\to\frac{1}{2}\text{ quand } x\to+\infty.$$

Donc la courbe de f admet en $+\infty$ une asymtpote oblique d'équation $y = 2x + \dfrac{1}{2}$.
De manière analogue, si $x < 0$, on a

$$f(x) = x+\sqrt{x^2+x+1} = x-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2-x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-x-1}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \to -\frac{1}{2} \text{ quand } x \to -\infty.$$

Donc la courbe de f admet une asymtote horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$.

Exercice 38 (n°79 p 165)

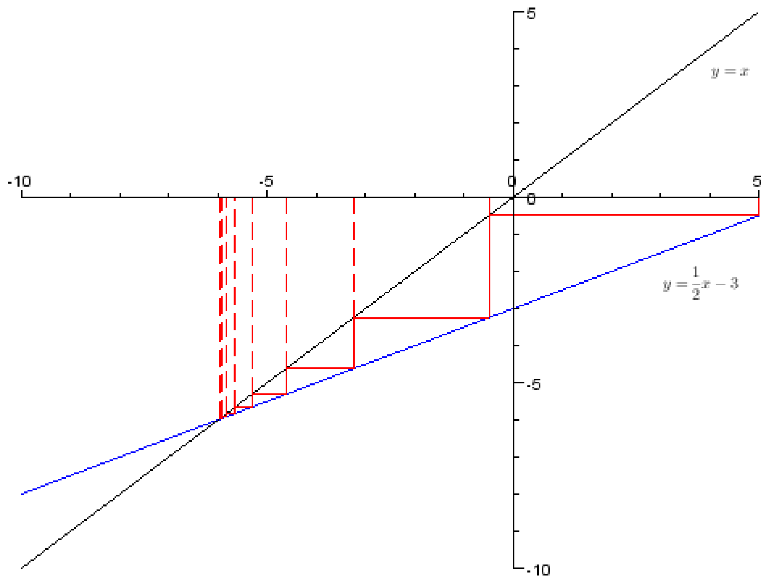
1) Le calcul donne pour les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 5, u_1 = -0.5, u_2 = -3.25, u_3 = -4.625, u_4 = -5.3125,$$

$$u_5 = -5.65625, u_6 = -5.828125, u_7 = -5.9140625, u_8 = -5.95703125\ldots$$

On peut conjecturer que (u_n) converge vers -6.

2)



On retrouve donc la même conjecture que dans la question précédente.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H(n) : u_n \geq -6$.
Par définition, on a $u_0 = 5 \geq -6$ donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.
Par définition, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - 3$. Or $u_n \geq -6$ donc $\dfrac{u_n}{2} \geq -3$ d'où $\frac{u_n}{2} - 3 \geq -6$ i.e. $u_{n+1} \geq -6$.
Donc $H(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -6$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{u_n} \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$ d'où $u_{n+1} \leq u_n$
(car ⚠ $u_n < 0$ ⚠). Donc (u_n) est décroissante. Finalement, (u_n) est décroissante et minorée donc

(u_n) converge. Notons l sa limite. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ donc en passant à la limite, on obtient $l - \frac{1}{2}l - 3$ d'où $l = -6$.

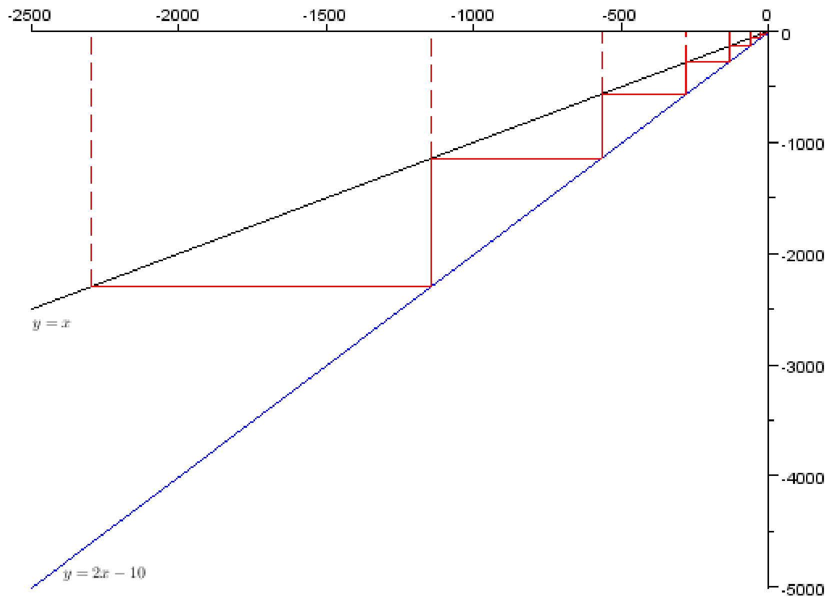
4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{v_n}{2}$. Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{11}{2^n}$. Ainsi, $u_n = \frac{11}{2^n} - 6$ donc on retrouve que (u_n) est décroissante, minorée par -6 et (u_n) converge vers -6.

Exercice 39 (n°80 p 165)

1) Le calcul des premiers termes de la suite (u_n) donne

$$u_0 = 1, u_1 = -8, u_2 = -26, u_3 = -62, u_4 = -134, u_5 = -278, u_6 = -566, u_7 = -1142\ldots$$

On peut donc conjecturer que (u_n) diverge vers $-\infty$.

2) 

On retrouve donc la conjecture de la question précédente.

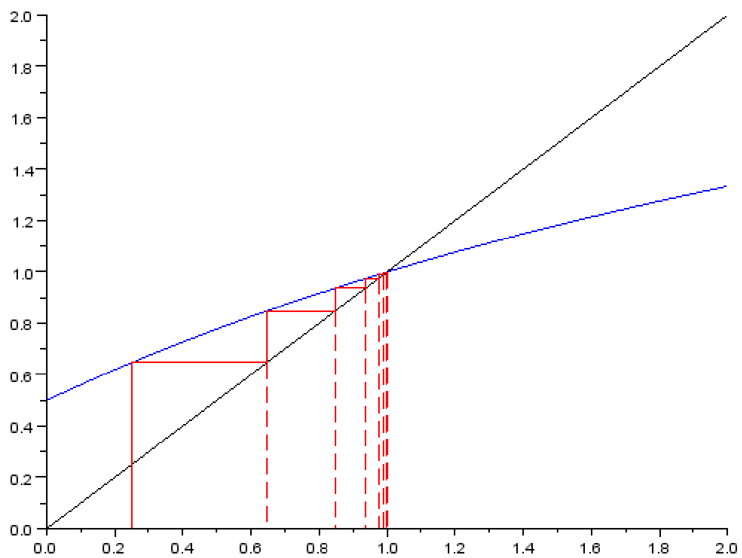
3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n) : u_n \leq 1$.
Par définition $u_0 = 1$ donc $H(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} = 2u_n - 10 \leq -8 \leq 1$ donc $H(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n - 10 \leq -9 < 0$ donc (u_n) est décroissante.
Supposons que (u_n) converge vers une limite finie a, alors $a = 2a - 10$ d'où $a = 10$. Or on a démontré que $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc (u_n) ne peut pas converger vers une limite finie. Comme (u_n) est décroissante, elle diverge nécessairement vers $-\infty$.

4) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 2u_n - 20 = 2v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 2. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0.2^n = -9 \times 2^n \to -\infty$ quand $n \to +\infty$.
D'où $u_n = v_n + 10 = -9 \times 2^n + 10 \to -\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 40 **(n°81 p 165)**

1) (u_n) est constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ i.e. $a = \frac{1}{3}a + 10$. Donc (u_n) est constante si et seulement si $a = 15$.
2) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 10$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc (u_n) est monotone. Plus précisément, si $u_0 < u_1$, alors on montre par récurrence que (u_n) est croissante et si $u_0 > u_1$, (u_n) est décroissante. En particulier, si $a \leq 15$, alors (u_n) est croissante et si $a \geq 15$, alors (u_n) est décroissante.
3) Supposons tout d'abord que $a \leq 15$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H(n) : a \leq u_n \leq 15$.
   Par hypothèse, $H(0)$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.
   On a $a \leq u_n \leq 15$ donc comme (u_n) est croissante (puisque $a \leq 15$), on a $a \leq u_{n+1}$. Par ailleurs, comme $u_n \leq 15$ et que f est croissante, on a $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(15) = 15$. Donc $H(n+1)$ est vraie.
   Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq 15$. On montre de manière analogue que si $a \geq 15$, on $15 \leq u_n \leq a$. Ainsi (u_n) est bornée. Finalement, (u_n) est monotone et bornée donc elle converge. Notons l sa limite. l vérifie $l = \frac{1}{3}l + 10$ donc $l = 15$.
4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = -u_{n+1} + 15 = -\frac{1}{3}u_n - 10 + 15 = -\frac{1}{3}u_n + 5 = \frac{v_n}{3}$. Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. D'où $v_n = \frac{v_0}{3^n} = \frac{15-a}{3^n}$. Ainsi $u_n = 15 - v_n = 15 - \frac{15-a}{3^n} \to 15$ quand $n \to +\infty$. On retrouve également que si $a \leq 15$, alors (u_n) est croissante et si $a \geq 15$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 41 **(n°83 p 165)**

1) 

   La suite (u_n) semble croissante et converger vers 1.
2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - (2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2} > 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 3

3) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2+3x}{4+x} = x \Leftrightarrow 2+3x = 4x + x^2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1.$$

Donc si (u_n) converge, c'est vers -2 ou 1.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = \dfrac{2+u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{2+\frac{2+3u_n}{4+u_n}}{1-\frac{2+3u_n}{4+u_n}} = \dfrac{\frac{10+5u_n}{4+u_n}}{\frac{2-2u_n}{4+u_n}} = \dfrac{10+5u_n}{2-2u_n} = \dfrac{5}{2}v_n$.

Donc (v_n) est géoémtrique de raison $\dfrac{5}{2}$ d'où $v_n = v_0\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 3\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $v_n = \dfrac{2+u_n}{1-u_n}$ donc $u_n(1-v_n) = v_n - 2$ i.e.

$$u_n = \frac{v_n - 2}{v_n + 1} = \frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n - 2}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n + 1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Enfin, f est croissante donc (u_n) est monotone et comme $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_n \to 1$, alors nécessairement (u_n) est croissante.

Exercice 42 (n°104 p 168)

1) Soit $a, b > 0$. On a

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)\frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}} = \frac{\frac{(a+b)^2}{4} - ab}{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)} = \frac{(a-b)^2}{4\left(\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}\right)} \geq 0.$$

Donc $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2) a./ Le calcul des premiers termes donne

$$u_0 = 1, u_1 \approx 1.41421356, u_2 \approx 1.456475, u_3 \approx 1.496791, u_4 \approx 1.456791\ldots$$

$$v_0 = 2, v_1 = 1.5, v_2 \approx 1.457106, v_3 \approx 1.456791, v_4 \approx 1.456791\ldots$$

Les suites (u_n) et (v_n) semblent converger vers la même limite.

b./ D'après la question 1), on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

c./ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n \geq u_n$ donc $u_n v_n \geq u_n^2$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante. De manière analogue, on a $u_n \leq v_n$ donc $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq v_n$ donc (v_n) est décroissante.

d./ D'après les questions précédentes, on a

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont bornées par u_0 et v_0. Comme elles sont bornées, elles convergent.

e./ Notons l la limite de (u_n) et l' celle de (v_n). Alors $l' = \dfrac{l+l'}{2}$ donc $l = l'$. Ainsi, (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(u_n - v_n)$ tend vers 0 donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

f./ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \frac{\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2 - u_n v_n}{\frac{u_n+v_n}{2} + \sqrt{u_n v_n}} \\ &= \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4\left(\frac{u_n+v_n}{2} + \sqrt{u_n v_n}\right)} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{2\left(u_n + v_n + 2\sqrt{u_n v_n}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(u_n - v_n)^2}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2} \end{aligned}$$

On a $u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$ donc $\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n} \geq 2$ d'où $\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2 \geq 4$ et $\dfrac{1}{\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)^2} \leq \dfrac{1}{4}$. D'où

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8}(u_n - v_n)^2.$$

g./ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H(n) : v_n - u_n \leq \dfrac{8}{8^{(2^n)}}$.

On a $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$ et $\dfrac{8}{8^{2^0}} = 1$ donc $H(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.

On a

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{8}(u_n - v_n)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{8^2}{\left(8^{(2^n)}\right)^2} = \frac{8}{8^{(2^n+1)}}.$$

Donc $H(n+1)$ est vraie.

La principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leq \dfrac{8}{8^{(2^n)}}$.

h./ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précéde, u_n est une valeur approchée de la limite commune de (u_n) et (v_n) dès que $\dfrac{8}{8^{(2^n)}} \leq 10^{-10}$. Donc dès que $n \geq 4$, u_n est une valeur approchée de l à 10^{-10} près.